Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas I (MA1111)
Ene-Mar 2022
Secciones 13, 14 y 15

1er Examen Parcial (25 %)

Pregunta 1. (8 ptos.) Halle todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que

$$0 < \left| \frac{x^2 - \left|x^2 - 4a^2\right|}{x - 4a} \right| < a$$

con a es un número real constante positivo ($a > 0$).

Solución: Primeramente, en lo que sigue, siempre estaremos considerando $x \neq 4a$ para garantizar que no estemos dividiendo por cero. Luego, dado que $x^2 - 4a^2 = (x + 2a)(x - 2a)$ entonces

$$\left|x^2 - 4a^2\right| = \begin{cases} x^2 - 4a^2 & , \text{si } x \in (-\infty, -2a] \cup [2a, \infty) \\ -x^2 + 4a^2 & , \text{si } x \in (-2a, 2a) \end{cases}$$

por lo que consideraremos los casos determinados en este valor absoluto.

Si $x \in (-\infty, -2a] \cup [2a, \infty) \setminus \{4a\}$ entonces

$$0 < \left| \frac{x^2 - \left|x^2 - 4a^2\right|}{x - 4a} \right| < a \iff 0 < \left| \frac{4a^2}{x - 4a} \right| < a \iff 4a < |x - 4a|$$

ya que $\left| \dfrac{4a^2}{x - 4a} \right| = \dfrac{\left|4a^2\right|}{|x - 4a|} = \dfrac{4a^2}{|x - 4a|}$ y tanto a como $|x - 4a|$ son positivos. Como,

$$\begin{aligned} 4a < |x - 4a| &\iff x - 4a < -4a \quad \text{o} \quad 4a < x - 4a \\ &\iff x < 0 \quad \text{o} \quad 8a < x \end{aligned}$$

tenemos que los valores de x pertenecientes a

$$\Big((-\infty, -2a] \cup [2a, \infty) \setminus \{4a\}\Big) \bigcap \Big((-\infty, 0) \cup (8a, \infty)\Big) = (-\infty, -2a] \cup (8a, \infty)$$

satisfacen la inecuación.

Si $x \in (-2a, 2a)$ entonces

$$0 < \left| \frac{x^2 - \left|x^2 - 4a^2\right|}{x - 4a} \right| < a \iff 0 < \left| \frac{2x^2 - 4a^2}{x - 4a} \right| < a$$

Dado que $\left|\dfrac{2x^2-4a^2}{x-4a}\right| \geq 0$, encontremos los valores de x tales que $\left|\dfrac{2x^2-4a^2}{x-4a}\right| = 0$ para excluirlos y así garantizar que $\left|\dfrac{2x^2-4a^2}{x-4a}\right| > 0$. Como,

$$0 = \left|\frac{2x^2-4a^2}{x-4a}\right| = \frac{\left|2x^2-4a^2\right|}{|x-4a|} = 2\frac{\left|x+\sqrt{2}a\right|\left|x-\sqrt{2}a\right|}{|x-4a|}$$

tenemos que

$$0 = \left|\frac{2x^2-4a^2}{x-4a}\right| \iff x = -\sqrt{2}a \quad \text{o} \quad x = \sqrt{2}a$$

y esos son los valores a excluir. Por otra parte,

$$\begin{aligned}\left|\frac{2x^2-4a^2}{x-4a}\right| < a \quad &\iff \quad -a < \frac{2x^2-4a^2}{x-4a} \quad \text{y} \quad \frac{2x^2-4a^2}{x-4a} < a \\ &\iff \quad 0 < \frac{2x^2+ax-8a^2}{x-4a} \quad \text{y} \quad \frac{2x^2-ax}{x-4a} < 0\end{aligned}$$

Como

$$2x^2+ax-8a^2 = 2\left(x-\left(-1-\sqrt{65}\right)a/4\right)\left(x-\left(-1+\sqrt{65}\right)a/4\right)$$

y

$$2x^2-ax = 2x\left(x-a/2\right)$$

el análisis de signos

	$\left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{65}}{4}a\right)$	$\left(\frac{-1-\sqrt{65}}{4}a, \frac{-1+\sqrt{65}}{4}a\right)$	$\left(\frac{-1+\sqrt{65}}{4}a, 4a\right)$	$(4a, \infty)$
$2x^2+ax-8a^2$	$+$	$-$	$+$	$+$
$x-4a$	$-$	$-$	$-$	$+$

	$(-\infty, 0)$	$(0, a/2)$	$(a/2, 4a)$	$(4a, \infty)$
$2x^2-ax$	$+$	$-$	$+$	$+$
$x-4a$	$-$	$-$	$-$	$+$

establece que

$$0 < \frac{2x^2+ax-8a^2}{x-4a} \iff x \in \left(\frac{-1-\sqrt{65}}{4}a, \frac{-1+\sqrt{65}}{4}a\right) \cup (4a, \infty)$$

y

$$\frac{2x^2-ax}{x-4a} < 0 \iff (-\infty, 0) \cup (a/2, 4a)$$

Luego,

$$\left|\frac{2x^2-4a^2}{x-4a}\right|<a \iff x\in\left(\left(\tfrac{-1-\sqrt{65}}{4}a,\tfrac{-1+\sqrt{65}}{4}a\right)\cup(4a,\infty)\right)\bigcap\left((-\infty,0)\cup({}^{a}/_{2},4a)\right)$$
$$\iff x\in\left(\tfrac{-1-\sqrt{65}}{4}a,0\right)\cup\left({}^{a}/_{2},\tfrac{-1+\sqrt{65}}{4}a\right)$$

Así, tenemos que los valores de x pertenecientes a

$$\left((-2a,2a)\bigcap\left(\left(\frac{-1-\sqrt{65}}{4}a,0\right)\cup\left({}^{a}/_{2},\frac{-1+\sqrt{65}}{4}a\right)\right)\right)\setminus\{-\sqrt{2}a,\sqrt{2}a\}$$

$$=\left(-2a,-\sqrt{2}a\right)\cup\left(-\sqrt{2}a,0\right)\cup\left({}^{a}/_{2},\sqrt{2}a\right)\cup\left(\sqrt{2}a,\frac{-1+\sqrt{65}}{4}a\right)$$

también satisfacen la inecuación.

Uniendo las soluciones obtenidas en los dos casos que hemos considerado, obtenemos que los valores de $x\in\mathbb{R}$ tales que

$$0<\left|\frac{x^2-\left|x^2-4a^2\right|}{x-4a}\right|<a$$

son los que pertenecen al conjunto

$$\left(-\infty,-\sqrt{2}a\right)\cup\left(-\sqrt{2}a,0\right)\cup\left({}^{a}/_{2},\sqrt{2}a\right)\cup\left(\sqrt{2}a,\frac{-1+\sqrt{65}}{4}a\right)\cup(8a,\infty)$$

para cualquier valor de la constante potitiva a.

Pregunta 2. (8 ptos.) Halle la ecuación de la circunferencia cuyo centro está sobre la recta $8x-4y+9=0$ y que pasa por los puntos $A(1,-3)$ y $B(2,2)$.

Solución: Denotemos al centro de la circunferencia por (C_x,C_y). Como el centro está sobre la recta $8x-4y+9=0$, tenemos que sus coordenadas cumplen la relación
$$8C_x-4C_y+9=0.$$
Por otra parte, si denotamos al radio de la circunferencia por r, tenemos que su ecuación viene dada por
$$(x-C_x)^2+(y-C_y)^2=r^2.$$

Como los puntos $A(1,-3)$ y $B(2,2)$ pertenecen a la circunferencia, sus coordenadas cumplen la relación dada por la ecuación de la circunferencia. Luego,

$$(1-C_x)^2+(-3-C_y)^2=r^2 \qquad \text{y} \qquad (2-C_x)^2+(2-C_y)^2=r^2$$

de donde se obtiene que

$$1+C_x+5C_y=0$$

después de simplificar la ecuación $(1-C_x)^2+(-3-C_y)^2=(2-C_x)^2+(2-C_y)^2$.

Tenemos entonces que el centro de la circunferencia es el punto donde se intersectan las rectas $8x-4y+9=0$ y $1+x+5y=0$. Luego, resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtienen las coordenadas del centro.

$$\begin{cases} 8C_x-4C_y+9=0 \\ 1+C_x+5C_y=0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad (C_x,C_y)=\left(-49/44, 1/44\right)$$

El cuadrado del radio se puede obtener reemplazando las coordenadas del centro y las de cualquier punto perteneciente a la circunferencia en su ecuación. Así, $r^2=13169/968$. Finalmente, la ecuación de la circunferencia deseada es

$$\left(x+49/44\right)^2+\left(y-1/44\right)^2=13169/968$$

o, equivalentemente,

$$22x^2+49x+22y^2+y-272=0.$$

Pregunta 3. Dadas las funciones

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4 & ,\text{ si } x>6 \\ 1 & ,\text{ si } 22/7\le x\le 6 \\ -(x-2)^2 & ,\text{ si } x<22/7 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x)=|2x-3|-|x+1|$$

a. (2 ptos.) Haga un bosquejo del gráfico de la función f;

b. (1 ptos.) Haga un bosquejo del gráfico de la función g;

c. (6 ptos.) Determine $f\circ g$.

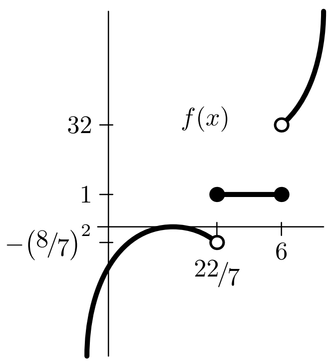
Solución: Usando que

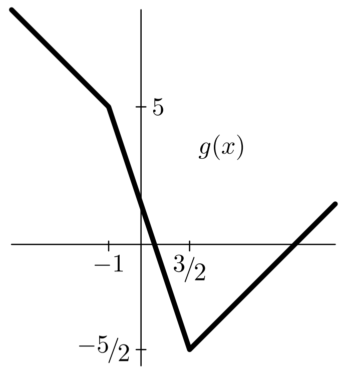
$$|2x-3|=\begin{cases} 2x-3 & ,\text{ si } x\ge 3/2 \\ -(2x-3) & ,\text{ si } x<3/2 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad |x+1|=\begin{cases} x+1 & ,\text{ si } x\ge -1 \\ -(x+1) & ,\text{ si } x<-1 \end{cases}$$

podemos reescribir la expresión de la función g como

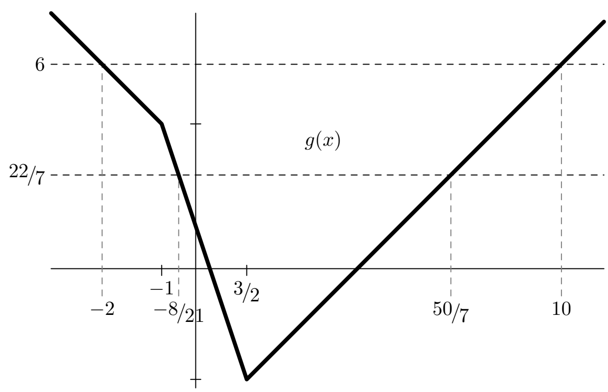
$$g(x) = \begin{cases} x-4 & \text{, si } x \geq {}^{3}\!/\!_{2} \\ -3x+2 & \text{, si } -1 \leq x < {}^{3}\!/\!_{2} \\ -x+4 & \text{, si } x < -1 \end{cases}$$

Los bosquejos de las funciones f y g son:





Apoyándonos en el gráfico de la función g, podemos determinar las regiones donde las imágenes de g caen en los intervalos que determinan distintas expresiones de la función f.



Así,

$$\begin{aligned} g(x) > 6 \quad &\iff \quad x \in (-\infty, -2) \cup (10, \infty) \\ {}^{22}\!/\!_{7} \leq g(x) \leq 6 \quad &\iff \quad x \in \left[-2, -{}^{8}\!/\!_{21}\right] \cup \left[{}^{50}\!/\!_{7}, 10\right] \\ g(x) < {}^{22}\!/\!_{7} \quad &\iff \quad x \in \left(-{}^{8}\!/\!_{21}, {}^{50}\!/\!_{7}\right) \end{aligned}$$

Luego,

$$\big(f \circ g\big)(x) = \begin{cases} (x-6)(x-2) & \text{, si } x \in (-\infty, -2) \cup (10, \infty) \\ 1 & \text{, si } x \in \left[-2, -{}^{8}\!/\!_{21}\right] \cup \left[{}^{50}\!/\!_{7}, 10\right] \\ -9x^2 & \text{, si } x \in \left(-{}^{8}\!/\!_{21}, {}^{3}\!/\!_{2}\right) \\ -(x-6)^2 & \text{, si } x \in \left[{}^{3}\!/\!_{2}, {}^{50}\!/\!_{7}\right) \end{cases}$$

habiendo simplificado las expresiones.